

赋 Φ -Amemiya 范数的 Orlicz 空间的端点

崔云安, 安莉丽

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 在 Orlicz 空间中, 给出了新范数— Φ -Amemiya 范数的计算公式, 讨论了赋 Φ -Amemiya 范数的 Orlicz 空间的范数可达的条件, 并研究了端点的判别准则, 作为推论得到了赋 Φ -Amemiya 范数的 Orlicz 空间严格凸的充要条件。

关键词: Φ -Amemiya 范数; Orlicz 空间; 范数可达; 端点; 严格凸

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.02.020

中图分类号: O177.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2021)01-0149-05

An Extreme Point of Orlicz Spaces Equipped with Φ -Amemiya Norm

CUI Yun-an, AN Li-li

(College of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In Orlicz space, the formula of computation of a new norm that we call Φ -Amemiya norm is given. In this paper, we discuss the conditions of norm attainability of the Orlicz space equipped with Φ -Amemiya norm, and the criterion of an extreme point is studied. Based on this, the conditions under which the norm of the Orlicz space with the Φ -Amemiya norm can be reached are discussed. The necessary and sufficient conditions for the strictly convex Orlicz space of the Φ -Amemiya norm are reached.

Keywords: Φ -Amemiya norm; Orlicz space; norm attainability; extreme point; strictly convex

0 引 言

Orlicz 空间作为一类特殊的 Banach 空间, 自从 1932 年波兰数学家 Orlicz 引入 Orlicz 空间以来, Orlicz 空间理论就因其重要的理论和应用价值受到了许多数学工作者的关注, 并在微分方程、逼近论、控制论、不动点等许多数学分支学科中得到了广泛应用^[1]。在其发展过程中主要出现了 3 个范数: 1932 年由 Orlicz 本人给出了 Orlicz 范数的定义^[2]; 1955

年, Luxemburg 在 Orlicz 空间中引入了 Luxemburg 范数^[3]; 2008 年崔云安和段丽芬引入了 p -Amemiya 范数^[4-7]。众所周知, 关于赋 Orlicz 范数、Luxemburg 范数以及 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间性质的研究已经比较成熟, 所以对 Orlicz 空间的新性质的进一步研究是十分重要的^[8-9]。我们将研究比上述 3 种范数更具有广泛意义的新范数, 赋 Φ -Amemiya 范数的 Orlicz 空间的可达性、端点和严格凸性。主要给出了范数可达的充要条件和端点的判别准则, 并据此得到了赋 Φ -Amemiya 范数的 Orlicz 空间严格凸

收稿日期: 2019-01-02

基金项目: 国家自然科学基金(11871181)。

作者简介: 崔云安(1961—), 男, 教授, 博士研究生导师。

通信作者: 安莉丽(1993—), 女, 硕士研究生, E-mail: 1468126191@qq.com.

的充要条件。

1 预备知识

本文以 X 表示一个 Banach 空间, $B(X)$ 和 $S(X)$ 分别表示闭单位球和单位球面。

定义1 映射 $\Phi: R \rightarrow [0, \infty)$ 称为 Orlicz 函数是指: Φ 是偶的、非负连续凸函数, 当且仅当 $u = 0$ 时 $\Phi(u) = 0$ 。满足 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$ 和 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ 的 Orlicz 函数称为 N -函数^[1]。

设 L^0 表示定义在 G 上的可测实函数全体, 定义 $I_\Phi: L^0 \rightarrow R^+ = [0, +\infty)$ 如下:

$$I_\Phi(x) = \int_G \Phi(x(t)) dt$$

称 $I_\Phi(x) = \int_G \Phi(x(t)) dt$ 是关于 Φ 的模。

由 Orlicz 函数生成的 Orlicz 空间记为 $L_\Phi = \{x \in L^0: \exists \lambda > 0, I_\Phi(\lambda x) < \infty\}$

关于 Orlicz 范数(Amemiya 范数):

$$\|x\|_\Phi^o = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi(kx))$$

Luxemburg 范数:

$$\|x\|_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

以及广义 Orlicz 范数:

$$\|x\|_{\Phi,p} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_\Phi^p(kx))^{\frac{1}{p}} \quad (p > 1)$$

均成为 Banach 空间^[1-13], 简记为:

$$L_\Phi^o = [L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi^o]$$

$$L_\Phi = [L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi]$$

$$L_{\Phi,p} = [L_\Phi, \|\cdot\|_{\Phi,p}]$$

定义2 设 Φ_1 是 N -函数, $(G, \sum, \mu)$ 是无原子有限测度空间, 记 $L^0(G)$ 为 G 上的 μ -可测函数的全体。定义模 $I_{\Phi, \Phi_1}: L^0(G) \rightarrow R$ 如下:

$$I_{\Phi, \Phi_1}(x) = \Phi\left(\int_G \Phi_1(x(t)) dt\right)$$

由 Φ_1 及 Φ 是凸函数知, I_{Φ, Φ_1} 为凸模, 记

$$L_{\Phi, \Phi_1} = \{x \in L^0(G) : \exists \lambda > 0, I_{\Phi, \Phi_1}(\lambda x) < +\infty\}$$

定义3 设 Φ 是 Orlicz 函数, 满足 $\max\{0, u-1\} \leq \Phi(u)$, 在 L_{Φ, Φ_1} (或 E_{Φ, Φ_1}) 上赋 Amemiya 范数, 称为 Φ -Amemiya 范数:

$$\|x\|_{\Phi, \Phi_1} = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + I_{\Phi, \Phi_1}(kx))$$

利用 Φ -Amemiya 与 Luxemburg 范数等价, 很容易得 $\{L_{\Phi, \Phi_1}, \|\cdot\|_{\Phi, \Phi_1}\}$ 是 Banach 空间。

定义4 $x \in S(X)$ 称为端点是指

$$x = \frac{y+z}{2} \quad (y, z \in B(X)), \text{ 则 } y = z. \text{ 若 Banach 空}$$

间单位球面上的每一点都是端点, 则称 X 是严格凸的^[16-19]。

定义5 称 N -函数满足 Δ_2 条件是指存在 $k > 2, u_0 \geq 0$ 满足:

$$\Phi(2u) \leq k\Phi(u) \quad (u \geq u_0)$$

定义6 设 Φ_1 是 N -函数, x 为实数。如果对任何两不同的实数 y, z , 只要 $\frac{y+z}{2} = x$ 就有 $\Phi_1(x) < \frac{\Phi_1(y) + \Phi_1(z)}{2}$, 则称 x 是 Φ_1 的一个严格凸点。 Φ_1 的严格凸点全体记为 S_{Φ_1} ^[20]。

2 主要结果及证明

先引入两个记号:

$$k_x^* = \inf\{k > 0 : k\Phi(I_{\Phi_1}(kx)) \int_G p_1(kx(t))$$

$$|x(t)| dt - \Phi(I_{\Phi_1}(kx)) \geq 1\}$$

$$k_x^{**} = \sup\{k > 0 : k\Phi(I_{\Phi_1}(kx)) \int_G p_1(kx(t))$$

$$|x(t)| dt - \Phi(I_{\Phi_1}(kx)) \leq 1\}$$

定理1 当且仅当 $k \in [k^*, k^{**}]$ 时,

$$\|x\|_{\Phi, \Phi_1} = \frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx)))$$

证明: 设 $L(k) = \frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx)))$, $L(k)$ 的

定义域为

$$D(x) = \{0 < k < \infty : I_{\Phi_1}(kx) < \infty\}$$

取 $x \in L_{\Phi, \Phi_1} \setminus \{0\}$, $D^0(x)$ 为 $D(x)$ 的内点集对 $\forall 0 < k_1 < k_2$, 根据 Orlicz 函数的凸性:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1} (\Phi(I_{\Phi_1}(k_1 x))) &= \frac{1}{k_1} \left(\Phi\left(I_{\Phi_1}\left(\frac{k_1}{k_2} \cdot k_2 x\right)\right) \right) \\ &\leq \frac{1}{k_2} (\Phi(I_{\Phi_1}(k_2 x))) \end{aligned}$$

我们得到函数 $k \rightarrow \frac{1}{k} (\Phi(I_{\Phi_1}(kx)))$ 在 $[0, \infty)$ 是单调递增的。

所以对 $\forall k \in D^0(x)$ 函数

$$k \rightarrow \frac{1}{k} (\Phi(I_{\Phi_1}(kx))) + \frac{1}{k} \text{ 有右导数。}$$

按通常数学分析规则可求得:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx))) \right)' = -\frac{1}{k^2} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx))) + \\ & \frac{1}{k} \Phi'(I_{\Phi_1}(kx)) \cdot \int_G p_1(kx(t)) |x(t)| dt \\ & = -\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} \Phi(I_{\Phi_1}(kx)) + \frac{1}{k} \Phi'(I_{\Phi_1}(kx)) \cdot \\ & \int_G p_1(kx(t)) |x(t)| dt \\ & = \frac{1}{k^2} \{ k \Phi'(I_{\Phi_1}(kx)) \int_G p_1(kx(t)) |x(t)| dt - \\ & \Phi(I_{\Phi_1}(kx)) - 1 \} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \|x\|_{\Phi, \Phi_1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx))) .$$

假设 $\exists k_0 \in D^0(x)$ 使得 $k^* \leq k_0 \leq k^{**}$, 则对 $0 < k < k_0$.

$$\begin{aligned} & k \Phi'(I_{\Phi_1}(kx)) \int_G p_1(kx(t)) |x(t)| dt - \\ & \Phi(I_{\Phi_1}(kx)) \leq 1, \text{ 对 } k \in D^0(x) \cap (k_0, \infty) \\ & k \Phi'(I_{\Phi_1}(kx)) \int_G p_1(kx(t)) |x(t)| dt - \\ & \Phi(I_{\Phi_1}(kx)) \geq 1. \end{aligned}$$

所以对

$$0 < k < k_0, \left(\frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx))) \right)' \leq 0$$

对 $k \in D^0(x) \cap (k_0, \infty)$,

$$\left(\frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx))) \right)' \geq 0$$

因此当且仅当 $k^* \leq k_0 \leq k^{**}$ 时

$$\|x\|_{\Phi, \Phi_1} = \inf_{k > 0} \left\{ \frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx))) \right\} =$$

$$\frac{1}{k_0} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(k_0 x))) .$$

推论1 若 Φ_1 是 N -函数, 则

$$k(x) \neq \emptyset (x \neq 0) .$$

$$\text{证明: 设 } L(k) = \frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx)))$$

则 $L(k)$ 是关于 k 的连续函数。

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} L(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx))) = +\infty$$

由 Φ_1 是 N -函数可得

$$\|x\|_{\Phi, \Phi_1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(kx))) =$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} (1 + \Phi(\int_G \Phi_1(kx(t)) dt)) =$$

$$\Phi\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_G \frac{\Phi_1(kx(t))}{k} dt\right) =$$

$$\Phi\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_G \frac{\Phi_1(kx(t))}{k |x(t)|} |x(t)| dt\right) = +\infty$$

故 $k(x) \neq \emptyset$ 。

定理2 若 Φ_1 是 N -函数, $x \in S(L_{\Phi, \Phi_1})$ 是 $B(L_{\Phi, \Phi_1})$ 端点的充分必要条件是:

$$\mu(\{t \in G, kx(t) \in R \setminus S_{\Phi_1}\}) = 0, k \in K(x)$$

证明: 充分性对 $\forall y, z \in B(L_{\Phi, \Phi_1}), x = \frac{y+z}{2}$ 显

然必有 $\|y\|_{\Phi, \Phi_1} = \|z\|_{\Phi, \Phi_1} = 1$ 。故存在 $k_1, k_2 > 1$, 使得

$$1 = \|y\|_{\Phi, \Phi_1} = \frac{1}{k_1} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(k_1 y)))$$

$$1 = \|z\|_{\Phi, \Phi_1} = \frac{1}{k_2} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(k_2 z))) .$$

记 $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$, 由函数的凸性可得

$$2 = \|y\|_{\Phi, \Phi_1} + \|z\|_{\Phi, \Phi_1} =$$

$$\frac{1}{k_1} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(k_1 y))) + \frac{1}{k_2} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(k_2 z))) =$$

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \left\{ 1 + \frac{k_2}{k_1 + k_2} \Phi(I_{\Phi_1}(k_1 y)) + \right.$$

$$\left. \frac{k_1}{k_1 + k_2} \Phi(I_{\Phi_1}(k_2 z)) \right\} \geq$$

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{k_2}{k_1 + k_2} (I_{\Phi_1}(k_1 y)) + \right.$$

$$\left. \frac{k_1}{k_1 + k_2} (I_{\Phi_1}(k_2 z)) \right\} \geq$$

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \left[1 + \Phi\left(I_{\Phi_1}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} z\right)\right) \right] =$$

$$2 \cdot \frac{1}{2k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(2kx))) \geq$$

$$2 \|x\|_{\Phi, \Phi_1} = 2$$

$$\text{于是 } \|x\|_{\Phi, \Phi_1} = 1 = \frac{1}{2k} (1 + \Phi(I_{\Phi_1}(2kx)))$$

即 $2k \in K(x)$ 。

并且对几乎所有的 $t \in G$ 都有

$$\frac{k_2}{k_1 + k_2} \Phi_1(k_1 y(t)) + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \Phi_1(k_2 z(t)) = \Phi_1(2kx(t))$$

再由已知条件 $2kx(t) \in S_{\Phi_1}$ 可得, 对几乎所有的 t 都有 $k_1 y = k_2 z$, 所以

$$k_1 = \|k_1 y\|_{\Phi, \Phi_1} = \|k_2 z\|_{\Phi, \Phi_1} = k_2 .$$

因此 $y = z$ 这就说明 x 为 $B(L_{\Phi, \Phi_1})$ 的端点。

必要性(反证法) 假设结论不成立。不失一般性, 设 $k \in K(x)$, $\mu(\{t \in G : kx(t) \in R \setminus S_{\phi_1}\}) > 0$, 因为 S_{ϕ_1} 的余集可表示为至多可列个开区间的并集, 所以必存在某个开区间 (a, b) , 使得 $\Phi(x)$ 在 (a, b) 上是线性的, $\Phi(x) = px + q$ 。并且存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\mu\left(\left\{t > 0 : \frac{a}{k} + \varepsilon < x(t) < \frac{b}{k} - \varepsilon\right\}\right) > 0.$$

将集合

$$\left\{t > 0 : \frac{a}{k} + \varepsilon < x(t) < \frac{b}{k} - \varepsilon\right\} \text{ 分解为两个}$$

不相交的等测度子集 E 和 F , 定义:

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in G \setminus E \cup F \\ x(t) - \varepsilon, & t \in E \\ x(t) + \varepsilon, & t \in F \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t \in G \setminus E \cup F \\ x(t) + \varepsilon, & t \in E \\ x(t) - \varepsilon, & t \in F \end{cases}$$

显然 $x = \frac{y+z}{2}$ 。

由 $\mu(E) = \mu(F) > 0$, 可知 $y \neq z$ 。

当 $t \in G \setminus E \cup F$ 时, $ky(t) = kx(t) \in (a, b)$ 。

当 $t \in E$ 时, $ky(t) = k(x(t) - \varepsilon)$

又 $a < k(x(t) - \varepsilon) < b - 2k\varepsilon$

所以 $ky(t) \in (a, b)$

当 $t \in F$ 时, $ky(t) = k(x(t) + \varepsilon)$

又 $a + 2k\varepsilon < k(x(t) + \varepsilon) < b$

所以 $ky(t) \in (a, b)$ 于是

$$\int_{E \cup F} \Phi_1(ky(t)) dt = \int_E (p_1(k(x(t) - \varepsilon)) + q) dt + \int_F (p_1(k(x(t) + \varepsilon)) + q) dt = \int_{E \cup F} (pkx(t) + q) dt = \int_{E \cup F} \Phi_1(kx(t)) dt$$

由此可得: $I_{\phi_1}(ky) = I_{\phi_1}(kx)$

于是 $\|y\|_{\phi, \phi_1} \leq \frac{1}{k}(1 + \Phi(I_{\phi_1}(ky))) =$

$$\frac{1}{k}(1 + \Phi(I_{\phi_1}(kx))) = \|x\|_{\phi, \phi_1} = 1$$

同理可得 $\|z\|_{\phi, \phi_1} \leq 1$

这与 x 为 $B(L_{\phi, \phi_1})$ 的端点矛盾。

定理3 若 Φ_1 是 N -函数, L_{ϕ, ϕ_1} 是严格凸的充要条件是 Φ_1 是严格凸的。

证明: 充分性由定理2立即可得。接下来证必要性。

若 Φ_1 非严格凸, 则存在 $x_0 \notin S_{\phi_1}$ 取 $E_1 \subset G$, 使得 $0 < \mu E_1 < \mu G$, 且 $\Phi_1(x_0)\mu E_1 \leq 1$, $\Psi_1(p(x_0))\mu E_1 \leq 1$ 。

再取 $x_1 > 0$, 使得

$$\Phi_1(x_1)\mu(G \setminus E_1) \geq 1 \text{ 和 } \Psi_1(p(x_1))\mu(G \setminus E_1) \geq$$

1,

于是

$$\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu(G \setminus E_1) \geq 1$$

$$\Psi_1(p(x_0))\mu(E_1) + \Psi_1(p(x_1))\mu(G \setminus E_1) \geq 1$$

即

$$\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu(G \setminus E_1) + \Psi_1(p(x_0))\mu(E_1) + \Psi_1(p(x_1))\mu(G \setminus E_1) \geq 2$$

对于 Orlicz 函数 Φ 取

$$\Phi(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu(G \setminus E_1)) \cdot (\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu(G \setminus E_1) + \Psi_1(p(x_0))\mu(E_1) + \Psi_1(p(x_1))\mu(G \setminus E_1)) - \Phi(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu(G \setminus E_1)) \geq 1$$

然后选 $E_2 \subset G \setminus E_1$, 满足

$$\Phi(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu E_2) \cdot (\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu E_2 + \Psi_1(p(x_0))\mu(E_1) + \Psi_1(p(x_1))\mu E_2) - \Phi(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu E_2) = 1$$

令

$$k = 1 + \Phi(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu E_2)$$

$$x(t) = \frac{|x_0|}{k} \chi_{E_1} + \frac{|x_1|}{k} \chi_{E_2}$$

则

$$k\Phi(I_{\phi_1}(kx)) \cdot \int_G p_1(kx(t)) |x(t)| dt - \Phi(I_{\phi_1}(kx)) =$$

$$\Phi\left(\int_G \Phi_1(kx(t)) dt\right) \cdot \int_G p_1(kx(t)) \cdot k|x(t)| dt -$$

$$\Phi\left(\int_G \Phi_1(kx(t)) dt\right) =$$

$$\Phi(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu E_2) \cdot$$

$$(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu E_2 +$$

$$\Psi_1(p(x_0))\mu(E_1) + \Psi_1(p(x_1))\mu E_2) -$$

$$\Phi(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu E_2) = 1$$

即 $k \in [k^*, k^{**}]$, 且 $\|x\|_{\phi, \phi_1} = \frac{1}{k}(1 +$

$$\Phi(I_{\phi_1}(kx))) =$$

$$\frac{1}{k}(1 + \Phi(\Phi_1(x_0)\mu(E_1) + \Phi_1(x_1)\mu E_2)) = 1$$

但 $\mu(t \in G : kx(t) \notin S_{\phi_1}) \geq \mu E_1 > 0$ 。

由定理2得, x 不是 $B(L_{\phi, \phi_1})$ 的端点, 产生矛盾。

参考文献:

- [1] 丁夏畦. 一类泛函空间的一些性质及应用 [J]. 数学学报, 1960, 10(3): 316.
DING Xiaqi. Some Properties and Applications of a Class of Functional Spaces [J]. Journal of Mathematics, 1960, 10(3): 316.
- [2] ORLICZ. 线性泛函分析 [M]. 北京: 科学出版社, 1963.
- [3] LUXEMBURG W A J, ZAAENEN A C. Conjugate Spaces of Orlicz Spaces [J]. Indagationes Mathematicae, 1956, 59: 217.
- [4] CUI Yun'an, DUAN Lifan, HUDZIK H, et al. Basic Theory of p -Amemiya Norm in Orlicz Spaces: Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with these Norms [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5): 1796.
- [5] 段丽芬, 崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的端点 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2009, 36(1): 6.
DUAN Lifan, CUI Yun'an. The Endpoint of Orlicz Spaces Equipped with Generalized Orlicz Norm [J]. Journal of Zhejiang University(SCIENCE EDITION), 2009, 36(1): 6.
- [6] CUI Yun'an, HUDZIK H, KAROL LEŚNIK. Order Asymptotically Isometric Copies of l_∞ , l_1 and c_0 in Banach Function Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 455(2).
- [7] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 31.
- [8] 吴从妍, 王廷辅, 陈述涛. Orlicz 空间几何理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986.
- [9] CHEN Shutao. Geometry of Orlicz Space [M]. Warszawa: Dissertation Mathematical 356, 1996.
- [10] CUI Yun'an, HUDZIK H, WISŁA M: M -Constants, Dominguez-Benavides Coefficient and Weak Fixed Point Property in Orlicz Sequence Spaces Equipped with the p -Amemiya Norm [J]. Fixed Point Theory and Applications. 2016, 2016(1): 89.
- [11] WANG Junming, LIU Xinbao, CUI Yun'an. Local Uniform Rotundity in Musielak-Orlicz Sequence Space Equipped with the Luxemburg Norm [J]. Comment. math. prace Mat, 2006, 46(1): 131.
- [12] 段丽芬, 左明霞, 崔云安. 赋广义 Orlicz 范数 Orlicz 函数空间的局部一致凸性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2014, 52(2): 219.
DUAN Lifan, ZUO Mingxia, CUI Yun'an. Locally Uniform Convexity of Orlicz Function Spaces with Generalized Orlicz Norm [J]. Journal of Jilin University (SCIENCE EDITION), 2014, 52(2): 219.
- [13] TURETT B. Rotundity of Orlicz Spaces [J]. Indagationes Mathematicae, 1976, 79(5): 462.
- [14] 崔云安, 王廷辅. Orlicz 空间的强端点 [J]. 数学杂志, 1987(4): 8.
CUI Yun'an, WANG Tingfu. Strong Endpoints of Orlicz Spaces [J]. Journal of Mathematics, 1987(4): 8.
- [15] CUI Yun'an, DUAN Lifan, HUDZIK H, et al. Basic Theory of p -Amemiya Norm in Orlicz Spaces: Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Endowed with these Norms [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5): 1796.
- [16] CUI Yun'an, HUDZIK H. Extreme Points and Strongly Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the Orlicz Norm [J]. Zeitschrift für Analysis Und Ihre Anwendungen, 2003, 22(4): 789.
- [17] 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 序列空间的端点和强端点 [J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2009(1): 53.
DUAN Lifan, CUI Yun'an. Extreme Points and Strongly Extreme Points in Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Generalized Orlicz Norm [J]. Journal of East China Normal University, 2009(1): 53.
- [18] WISŁA M. Geometric Properties of Orlicz Spaces Equipped with p -Amemiya Norms Results and Open Questions [J]. Commentationes Mathematicae, 2015, 55(2): 183.
- [19] CUI Yun'an, HUDZIK H, WISŁA M. Monotonicity Properties and Dominated Best Approximation Problems in Orlicz Spaces Equipped with the p -Amemiya Norm [J]. Math. Anal. Appl. 2015, 432(2): 1095.
- [20] 任丽伟. 赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的严格凸性 [J]. 数学杂志, 1999(2): 235.
REN Liwei. Strictly Convexity of Orlicz Lorentz Spaces with Orlicz Norm [J]. Journal of Mathematics, 1999(2): 235.

(编辑: 温泽宇)